

Trường đại học Cần Thơ  
Khoa Công nghệ thông tin và truyền thông  
Bộ môn Khoa học máy tính

# PHÉP ĐẾM

# Nội dung

- Các nguyên lý đếm
- Đại số tổ hợp

# Các nguyên lý đếm

- **Nguyên lý cộng:** Giả sử các sự kiện  $A_i$  ( $i=1, m$ ) đôi một loại trừ nhau; và các sự kiện  $A_i$  có tương ứng  $n_i$  cách xảy ra. Khi đó sự kiện (hoặc  $A_1$ , hoặc  $A_2$ , ..., hoặc  $A_m$ ) có:  
 $n_1 + n_2 + \dots + n_m$  cách xảy ra

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 1:** An có 3 áo tay dài, 5 áo tay ngắn. Để chọn 1 cái áo thì An có mấy cách?

$$3+5=8$$

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 2:** Một sinh viên có thể chọn đề tài niên luận từ 3 danh sách đề tài tương ứng có 23 của giảng viên 1, 15 của giảng viên 2 và 19 đề tài của giảng viên 3. Hỏi có bao nhiêu cách để một sinh viên chọn đề tài.

$$23+15+19=57$$

# Các nguyên lí đếm

- **Nguyên lí nhân:** Giả sử các sự kiện  $A_i$  ( $i=1,m$ ) đôi một loại trừ nhau; và các sự kiện  $A_i$  có tương ứng  $n_i$  cách xảy ra. Khi đó sự kiện ( $A_1$  và  $A_2$  và ... và  $A_m$ ) có:  
 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_m$  cách xảy ra

# Các nguyên lí đếm

- **Ví dụ 1:** Giả sử có 2 cái mặt nạ, 3 cái mũ, Hỏi có mấy cách hóa trang?

$$2 \times 3 = 6$$

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu xâu bit nhị phân có độ dài là 7?

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$



# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 3:** Có bao nhiêu bảng số xe khác nhau nếu mỗi bảng số bắt đầu là 3 chữ cái (có 26 chữ cái) và theo sau là 3 chữ số (có 10 chữ số)?

$$26 \times 26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 = 17576000$$

# Các nguyên lý đếm

■ **Ví dụ 4:** Cho tập  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2

■ Gọi số có 3 chữ số là abc

■ **TH1:  $c=0$ .** Khi đó

- c có 1 cách chọn
- a có 5 cách chọn ( $a \in X \setminus \{0\}$ )
- b có 4 cách chọn ( $b \in X \setminus \{a, 0\}$ )

TH1 có  $1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$

■ **TH2:  $c \neq 0$ .** Khi đó

- c có 2 cách chọn
- a có 4 cách chọn ( $a \in X \setminus \{c, 0\}$ )
- b có 4 cách chọn ( $b \in X \setminus \{a, c\}$ )

TH2 có  $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$

**Vậy có  $20 + 32 = 52$**

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 5:** Mỗi mật khẩu có độ dài từ 6-8 ký tự, mỗi ký tự là 1 chữ cái hoa hoặc là 1 chữ số, mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất 1 chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu có thể?

$$P = P_6 + P_7 + P_8$$

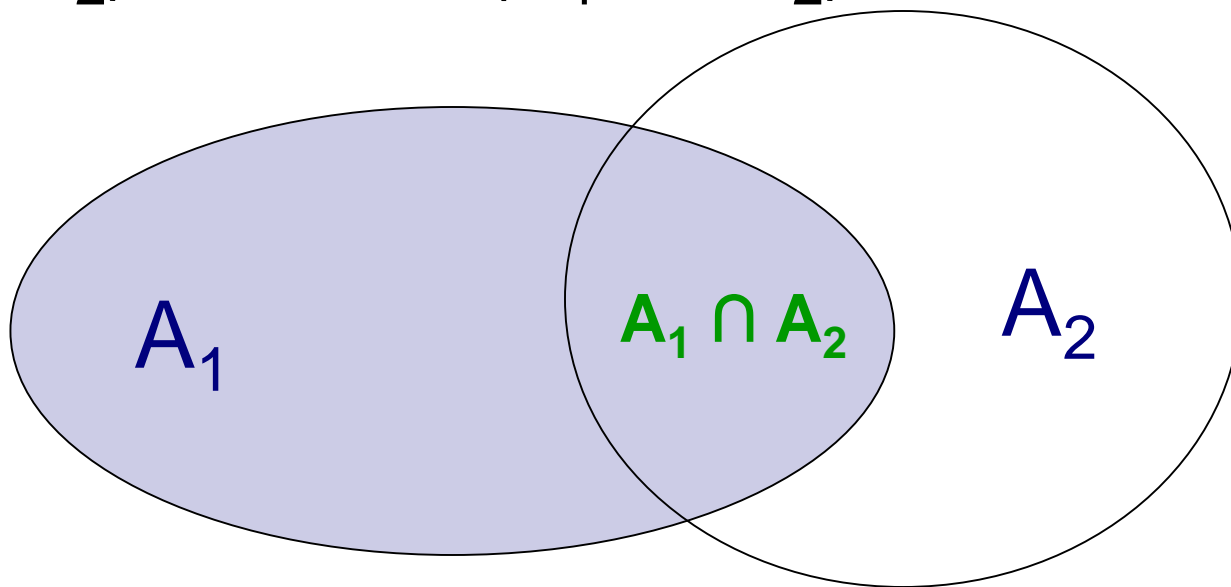
$$P_6 = 36^6 - 26^6$$

$$P_7 = 36^7 - 26^7 \quad (36^6 - 26^6) + (36^7 - 26^7) + (36^8 - 26^8)$$

$$P_8 = 36^8 - 26^8$$

# Các nguyên lý đếm

- **Nguyên lý bù trừ:** Cho  $A_1$  và  $A_2$  là 2 sự kiện bất kỳ, có thể xảy ra theo  $n_1$ ,  $n_2$  cách tương ứng. Khi đó sự kiện  $(A_1$  hoặc  $A_2)$  xảy ra:  
 $(n_1 + n_2) -$  số lần  $(A_1$  và  $A_2)$



# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 1:** Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 HS học tiếng Pháp, 26 HS học tiếng Anh, trong số đó có 15 HS học cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người?
  - $A_1$  là HS học Tiếng Pháp
  - $A_2$  là HS học Tiếng Anh
  - Số học sinh của lớp là:  $24 + 26 - 15 = 35$

# Các nguyên lý đếm

■ **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu xâu bit nhị phân có độ dài bằng 8 được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00?

- Xâu bit có độ dài bằng tám và có bit 1 đầu tiên?
- Xâu bit có độ dài bằng tám và kết thúc bằng hai bit 00?
- Xâu bit có độ dài bằng 8 bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00?

$$2^7 + 2^6 - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 160$$

# Nguyên lý Dirichlet

- **Nguyên lý Dirichlet:** Nếu có  $N$  vật được đặt vào trong  $k$  hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất  $\lceil N/k \rceil$  vật.
- Áp dụng để trả lời câu hỏi dạng: có tồn tại phân tử thỏa tính chất cho trước

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 1:** Trong 100 người có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng vì nếu chọn:
    - Số vật là 100 (người)
    - Số hộp là 12 (tháng)
- ⇒ sẽ có một cái hộp chứa không ít hơn  $= 8,333..$  người, tức là chứa ít nhất là 9 người.



# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 2:** Có 3 họ Nguyễn, Trần, Lê và 3 tên Mai, Lan, Trúc. Chứng minh rằng nếu ghép họ và tên để đặt cho 10 Cô thì sẽ có ít nhất 2 Cô cùng họ và tên.
    - 10 (Cô)
    - Tổng số họ-tên:  $3 \times 3 = 9$  (họ và tên)
- ⇒ sẽ có một cái hộp (họ và tên) chứa không ít hơn 2 người.

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 3:** CM rằng trong 5 số chọn từ tập  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  phải có 1 cặp có tổng bằng 9.
  - Ta lập 4 hộp như sau:  $\{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}$ .
  - Có 5 số nguyên được chọn từ  $X$  thì tồn tại ít nhất 2 số thuộc cùng 1 cặp (trong 1 hộp).

# Các nguyên lý đếm

- **Ví dụ 4:** CM rằng trong  $n+1$  số nguyên dương không lớn hơn  $2n$  thì tồn tại 1 số nguyên chia hết cho số nguyên kia.
  - Số nguyên  $a_i = 2^{k_i}q_i$  ( $i=1, n+1$ ), trong đó  $k_i$  số nguyên và  $q_i$  là số nguyên dương lẻ và không vượt quá  $2n$   
 $\Rightarrow$  có  $n$  giá trị nguyên dương lẻ và không vượt quá  $2n$
  - Với  $(n+1)$  số lẻ  $q_i$  thì tồn tại 2 số bằng nhau  $\Rightarrow$  tồn tại 2 số mà số này chia hết số kia.

# Nội dung

- Các nguyên lý đếm
- Đại số tổ hợp

# Hoán vị

- **Định nghĩa.** Hoán vị của  $n$  phần tử  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là một sắp xếp có thứ tự  $n$  phần tử này.
- **Định lý.** Có  $n!$  hoán vị của  $n$  phần tử.
- **Kí hiệu:**  $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1$
- Quy ước  $0! = 1$
- **Ví dụ:** Cho  $A = \{a, b, c\}$ . Khi đó  $A$  có các hoán vị sau:
  - $abc, acb,$
  - $bac, bca,$
  - $cab, cba$

# Hoán vị

- **Ví dụ 1:** Một thương nhân định đi bán hàng tại 8 thành phố. Anh ta bắt đầu cuộc hành trình của mình từ một thành phố nào đó, đi đến 7 thành phố còn lại theo bất kì thứ tự nào mà anh ta muốn. Hỏi anh ta có thể đi qua 7 thành phố còn lại theo bao nhiêu cách khác nhau?

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

# Hoán vị

■ **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái {A, B, C, D, E, F, G, H} có chứa xâu ABC?

□ Hãy xem xâu ABC như 1 ký tự đơn => có tất cả 6 ký tự {ABC, D, E, F, G, H} => có số cách sắp chữ là:

$$P_6 = 6! = 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$$

# Hoán vị

- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái {A, B, C, D, E, F, G, H} có chứa xâu **ABC** theo thứ tự bất kỳ?
  - Có  $3!$  hoán vị của xâu độ dài 3 ký tự A, B, C
  - Hãy xem hoán vị của xâu 3 ký tự A, B, C như 1 ký tự đơn  $\Rightarrow$  có tất cả 6 ký tự  $\Rightarrow$  có số cách sắp chữ là:

$$3! * 6!$$



# Chỉnh hợp

- **Định nghĩa:** Một sắp xếp có thứ tự của  $k$  phần tử trong tập hợp  $n$  phần tử được gọi là chỉnh hợp chập  $k$  của tập  $n$  phần tử.
- **Công thức:**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

# Chỉnh hợp

- **Ví dụ 1:** Cho  $X = \{a, b, c\}$ . Khi đó  $X$  có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là:  $ab, ba, ac, ca, bc, cb$ .
- **Ví dụ 2:** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số được tạo thành từ 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$A_6^3 = \frac{6!}{3!} = \frac{6 * 5 * 4 * 3!}{3!} = 6 * 5 * 4 = 120$$

# Tổ hợp

- **Định nghĩa:** Tổ hợp chập  $k$  của một tập hợp có  $n$  phần tử là một **cách chọn không có thứ tự  $k$  phần tử của  $n$  phần tử.**
- **Công thức:**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (k \leq n)$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \quad C_n^{n-k} = C_n^k$$

$$C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$$

# Tổ hợp

- **Ví dụ 1:** Cho  $X = \{1,2,3,4\}$ . Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của  $X$  là  $\{1,2,3\}$ ,  $\{1,2,4\}$ ,  $\{1,3,4\}$ ,  $\{2,3,4\}$
- **Ví dụ 2:** Một lớp có 30 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 10 bạn?  
Số cách chọn là tổ hợp chập 10 của 30.

$$C_{30}^{10} = \frac{30!}{10!(30-10)!}$$

# Tổ hợp

- Ví dụ 3: Một nhóm 30 người được đào tạo để trở thành nhà du hành vũ trụ thực hiện chuyến bay đầu tiên tới sao Hỏa. Hỏi có bao nhiêu cách lựa chọn một phi đội gồm 6 người cho nhiệm vụ đó?

$$C_{30}^6 = \frac{30!}{6! * 24!} = \frac{30 * 29 * 28 * 27 * 26 * 25 * 24!}{6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 24!} = 593775$$

# Tổ hợp

- Ví dụ 4: Xác định số xâu bit có độ dài  $n$  và chứa đúng  $r$  bit 1.

Các vị trí của  $r$  bit 1 trong xâu bit độ dài  $n$  là không quan trọng. Do đó, số các xâu này đúng bằng tổ hợp chập  $r$  của  $n$  phần tử, tức là

$$C_n^r$$

# Tổ hợp

- Ví dụ 5: Xác định số cách lựa chọn một hội đồng để triển khai môn toán rời rạc tại một trường đại học, nếu hội đồng gồm 3 thành viên của khoa toán, 4 thành viên của khoa CNTT. Biết rằng khoa toán có 9 thành viên và khoa CNTT có 11 thành viên.

$$C_9^3 * C_{11}^4 = \frac{9!}{3!*6!} * \frac{11!}{4!*7!} = 27720$$

# Hoán vị lặp

- **Định nghĩa.** Cho  $n$  đối tượng trong đó có  $n_i$  đối tượng loại  $i$  ( $i = 1, \dots, k$ ;  $n_1 + \dots + n_k = n$ ). Một sắp xếp có thứ tự  $n$  đối tượng là một *hoán vị lặp* của  $n$ .
- Số hoán vị lặp của  $n$  đối tượng

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$



# Hoán vị lặp

- **Ví dụ 1:** Có thể nhận bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?
  - Xâu độ dài là 7 trong đó có 3 ký tự S, 2 ký tự C, 1 ký tự E, 1 ký tự U

$$\frac{7!}{3! * 2! * 1! * 1!} = 420$$

# Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa:** Có  $n$  phần tử khác nhau, mỗi cách lấy  $k$  phần tử từ  $n$  phần tử **có lặp**, **có thứ tự** được gọi là chỉnh hợp lặp chập  $k$  của  $n$ .

$$B_n^k = n^k$$

# Chỉnh hợp lặp

- Ví dụ 1: Từ bảng 26 chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài  $n$ ?

Theo qui tắc nhân, vì có 26 chữ cái và vì mỗi chữ có thể dùng lại nên chúng ta có  $26^n$  xâu với độ dài  $n$ .

# Tổ hợp lặp

- **Định nghĩa.** Mỗi cách chọn ra  $k$  phần tử (không quan tâm đến thứ tự) từ tập gồm  $t$  phần tử khác nhau (mỗi phần tử có thể được chọn lặp lại) được gọi là **tổ hợp lặp** chập  $k$  của  $t$

$$C_{t+k-1}^{t-1} = C_{t+k-1}^k = \frac{(t+k-1)!}{k!(t-1)!}$$

# Tổ hợp lặp

- **Ví dụ 1:** Giả sử trong một đĩa trái cây có táo, cam, lê, mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu giả sử rằng thứ tự các quả được chọn không quan trọng.

4 táo	4 cam	4 lê
3 táo, 1 cam	3 táo, 1 lê	3 cam, 1 táo
3 cam, 1 lê	3 lê, 1 táo	3 lê, 1 cam
2 táo, 2 cam	2 táo, 2 lê	2 cam, 2 lê
2 táo, 1 cam, 1 lê	2 cam, 1 táo, 1 lê	2 lê, 1 táo, 1 cam

# Tổ hợp lặp

- Ví dụ 2: Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một kết đưng tiền gồm 7 tờ có mệnh giá là 1\$, 2\$, 5\$, 10\$, 20\$, 50\$ và 100\$? Giả sử thứ tự các tờ tiền chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

$$C_{11}^5 = \frac{11!}{5! * 6!} = 462$$