

Trường đại học Cần Thơ
Khoa Công nghệ thông tin và truyền thông
Bộ môn Khoa học máy tính

BÀI TẬP CHIA & ĐỒNG DƯ



Bài tập 0

- CM rằng với mọi số nguyên n , dư của phép chia n^2 cho 4 chỉ có thể là 0 hoặc 1.

n là chẵn $\Rightarrow n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$ chia hết cho 4 (dư 0)

n là lẻ $\Rightarrow n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ chia cho 4 dư 1



Bài tập 1

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên của PT: $x^2 - y^2 = 2014$
 x^2, y^2 chia cho 4 dư 0 hoặc 1 $\Rightarrow x^2 - y^2$ chia cho 4 dư 0, 1, -1 (hay 3)
tuy nhiên 2014 chia cho 4 dư 2
 $\Rightarrow$ PT vô nghiệm



Bài tập 2

- CM rằng với mọi số nguyên dương n , dư của phép chia n^3 cho 7 chỉ có thể là 0, 1 hoặc 6

$$n = 7k \Rightarrow n^3 = 7^3 k^3 \equiv 0(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 1 \Rightarrow n^3 = (7k + 1)^3 \equiv 1(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 2 \Rightarrow n^3 = (7k + 2)^3 \equiv 1(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 3 \Rightarrow n^3 = (7k + 3)^3 \equiv 6(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 4 \Rightarrow n^3 = (7k + 4)^3 \equiv 1(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 5 \Rightarrow n^3 = (7k + 5)^3 \equiv 6(\text{mod } 7)$$

$$n = 7k + 6 \Rightarrow n^3 = (7k + 6)^3 \equiv 6(\text{mod } 7)$$



Bài tập 3

□ Tìm tất cả các nghiệm nguyên của PT: $x^3 + y^3 = 2013$

x^3, y^3 chia cho 7 dư 0, 1 hoặc 6

$\Rightarrow x^3 + y^3$ chia cho 7 dư 0, 1, 2, 5, 6

tuy nhiên 2013 chia cho 7 dư 4

$\Rightarrow$ PT vô nghiệm

Bài tập 4

- Trong các nghiệm nguyên không âm của PT: $3x + 5y = 2012$, tìm nghiệm sao cho $x + y$ nhỏ nhất

Từ PT $\Rightarrow x = 670 - y - 2(y - 1)/3$ là nguyên

$\Rightarrow 2(y-1)/3 = k$ phải là số nguyên

$\Rightarrow 2(y-1) = 3k \Rightarrow k = 2t, y = 3t + 1 \Rightarrow x = 669 - 5t$

Do $x \geq 0 \Rightarrow 669 - 5t \geq 0 \Rightarrow t \leq 133.8$

Hơn nữa, $x + y = 670 - 2t$ nhỏ nhất khi t là nguyên lớn nhất nhưng nhỏ hơn 133.8 $\Rightarrow t = 133$

$\Rightarrow x = 4, y = 400$



Bài tập 5

□ Tìm các nghiệm nguyên của PT: $x + y + xy = 9$

$$\text{Từ PT} \Rightarrow x + y + xy + 1 = 10 \Rightarrow (x+1)(y+1) = 10$$

$$(x+1) \text{ là ước của } 10 \Rightarrow (x+1) = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$$

$$(x+1) = \pm 1 \Rightarrow x = 0, y = 9 \text{ hoặc } x = -2, y = -11$$

$$(x+1) = \pm 2 \Rightarrow x = 1, y = 4 \text{ hoặc } x = -3, y = -6$$

$$(x+1) = \pm 5 \Rightarrow x = 4, y = 1 \text{ hoặc } x = -6, y = -3$$

$$(x+1) = \pm 10 \Rightarrow x = 9, y = 0 \text{ hoặc } x = -11, y = -2$$

Bài tập 6

- Tìm các nghiệm nguyên của PT: $2x^2 + 4x = 19 - 3y^2$
Từ PT $\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 19 - 3y^2 + 2 \Rightarrow 2(x+1)^2 = 3(7 - y^2)$
 $7 - y^2 \geq 0$ và chia hết cho 2 $\Rightarrow y$ lẻ và $y^2 \leq 7 \Rightarrow y = \pm 1$
 $\Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -4$

PT có 4 cặp nghiệm



Bài tập 7

- Tìm các nghiệm nguyên của PT: $5^x + 1 = 2^y$
- $5 \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^x \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow 5^x + 1 \equiv 2 \pmod{4}$
- $\Rightarrow 2^y \equiv 2 \pmod{4} \Rightarrow y = 1$
- $\Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Bài tập 8

- Biết $p, p + k, p + 2k$ là các số nguyên tố lớn hơn 3, CM rằng k chia hết cho 6

$p, p + k, p + 2k$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p, p + k, p + 2k$ phải là số lẻ không chia hết cho 3

Do $p, p+k$ cùng lẻ $\Rightarrow (p+k) - p = k$ chia hết cho 2

3 số dư của phép chia $p, p + k, p + 2k$ cho 3 là các số 1 hoặc 2 $\Rightarrow$ có 2 số dư bằng nhau $\Rightarrow$ có 3 trường hợp xảy ra:

$$p + k \equiv p \pmod{3} \Rightarrow k = (p + k) - p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k \text{ chia hết cho } 3$$

$$p + 2k \equiv p \pmod{3} \Rightarrow 2k = (p + 2k) - p \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k \text{ chia hết cho } 3$$

$$p + 2k \equiv (p + k) \pmod{3} \Rightarrow k = (p + 2k) - (p + k) \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k \text{ chia hết cho } 3$$

$\Rightarrow k$ chia hết cho 2 vừa chia hết cho 3 $\Rightarrow k$ chia hết cho 6

Bài tập 9

- Có tồn tại số nguyên tố p sao cho $p+2$, $p+4$, $p+8$, $p+16$ cũng là các số nguyên tố?

$p + 2$ là nguyên tố $\Rightarrow p \neq 2$ và $p \geq 3$

Đặt $p = 3 + k$, do p là số nguyên tố nên k phải chẵn $\Rightarrow k = 2t$ ($t \geq 0$)

$\Rightarrow p = 3 + 2t$, $p+2 = 3 + 2(t+1)$, $p+4 = 3 + 2(t+2)$

3 số nguyên liên tiếp t , $t+1$, $t+2$ phải có số chia hết cho 3

Nếu $t \neq 0 \Rightarrow 1$ trong 3 số p , $p+2$, $p+4$ phải có số chia hết cho 3

$\Rightarrow 1$ trong 3 số p , $p+2$, $p+4$ không phải số nguyên tố

Nếu $t = 0 \Rightarrow p = 3$, $p+2 = 5$, $p+4 = 7$, $p+8 = 11$, $p+16 = 19$

là các số nguyên tố

Bài tập 10

- Bộ 3 số nguyên dương lẻ liên tiếp 3, 5 và 7 đồng thời cũng là các số nguyên tố. Tìm tất cả các bộ số như vậy

Xét bộ 3 số nguyên dương lẻ liên tiếp $p, p+2, p+4$ là các số nguyên tố với $p \geq 3$

Nếu p chia hết cho 3 hơn nữa p là nguyên tố $\Rightarrow p = 3, p+2 = 5, p+4 = 7$
cùng là số nguyên tố

Nếu p chia cho 3 dư 1 $\Rightarrow p = 3t + 1 \Rightarrow p+2 = 3t + 3$ chia hết cho 3
 $p+2$ không là số nguyên tố

Nếu p chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow p = 3t + 2 \Rightarrow p+4 = 3t + 6$ chia hết cho 3
 $p+4$ không là số nguyên tố

Bài tập 11

- CM rằng nếu a, b là nguyên tố cùng nhau thì $(5a+3b)$ và $(13a+8b)$ cũng là nguyên tố cùng nhau.

$$\begin{aligned}\text{Theo Euclid, } (13a+8b, 5a+3b) &= (5a+3b, 3a+2b) = (3a+2b, 2a+b) \\ &= (2a+b, a+b) = (a+b, a) = (a, b) = 1\end{aligned}$$

$\Rightarrow 13a+8b$ và $5a+3b$ là nguyên tố cùng nhau

Bài tập 12

□ Tìm số dư của phép chia $2013^{2015} + 2014^{2013}$ cho 13

$$2014 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2014^{2013} \equiv -1 \pmod{13}$$

$$2013 \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow 2013^{2015} \equiv (-2)^{2015} \pmod{13} \equiv -2^{2015} \pmod{13}$$

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{2015} = 2^{12 \cdot 167 + 11} \equiv 2^{11} \pmod{13} \equiv 7 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2013^{2015} \equiv -7 \pmod{13} \equiv 6 \pmod{13}$$

Dư của phép chia $2013^{2015} + 2014^{2013}$ cho 13 là 5



Bài tập 13

□ Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 13

$$2014 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 2014^{2015} \equiv -1 \pmod{13}$$

$$2013 \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow 2013^{2014} \equiv (-2)^{2014} \pmod{13} \equiv 2^{2014} \pmod{13}$$

$$2^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Rightarrow 2^{2014} = 2^{12 \cdot 167 + 10} \equiv 2^{10} \pmod{13} \equiv 10 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow 2013^{2014} \equiv 10 \pmod{13}$$

Dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 13 là 9

Bài tập 14

□ Tìm dư của phép chia $2014^{2015} + 2015^{2016}$ cho 17

$$2014 \equiv 8 \pmod{17} \Rightarrow 2014^8 \equiv 8^8 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}$$

$$2014^{2015} \equiv 8^{2015} \pmod{17} \equiv 8^{8 \times 251 + 7} \pmod{17} \equiv 15 \pmod{17}$$

$$2015 \equiv 9 \pmod{17} \Rightarrow 2015^8 \equiv 9^8 \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}$$

$$2015^{2016} \equiv 9^{2016} \pmod{17} \equiv 9^{8 \times 252} \pmod{17} \equiv 1 \pmod{17}$$

Dư của phép chia $2014^{2015} + 2015^{2016}$ cho 17 là 16



Bài tập 15

□ Tìm số dư của phép chia $2014^{2013} + 2015^{2014}$ cho 11

$$2014 \equiv 1(\text{mod } 11) \Rightarrow 2014^{2013} \equiv 1(\text{mod } 11)$$

$$\begin{aligned} 2015 &\equiv 2(\text{mod } 11) \Rightarrow 2015^{10} \equiv 1(\text{mod } 11) \Rightarrow 2015^{2014} = 2015^{10 \cdot 201 + 4} \\ &\equiv 2^{10 \cdot 201 + 4}(\text{mod } 11) \equiv 5(\text{mod } 11) \end{aligned}$$

Dư của phép chia $2014^{2013} + 2015^{2014}$ cho 11 là 6

Bài tập 16

□ Tìm dư của phép chia $2012^{2013} + 2014^{2015}$ cho 7

$$2012 \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 2012^3 \equiv 27 \pmod{7} \equiv -1 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 2012^{2013} = 2012^{3 \cdot 671} \equiv (-1)^{671} \pmod{7} \equiv -1 \pmod{7}$$

$$2014 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 2014^2 \equiv 4 \pmod{7}, 2014^3 \equiv -8 \pmod{7} \equiv -1 \pmod{7}$$

$$2014^{2015} = 2014^{3 \cdot 671 + 2} \equiv (-1 \pmod{7})(4 \pmod{7}) \equiv -4 \pmod{7} \equiv 3 \pmod{7}$$

$$2012^{2013} + 2014^{2015} \equiv 2 \pmod{7}$$

$2012^{2013} + 2014^{2015}$ chia 7 dư 2

Bài tập 17

- Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 7
- $$2013 \equiv 4 \pmod{7} \Rightarrow 2013^6 \equiv 1 \pmod{7}$$
- $$\Rightarrow 2013^{2014} = 2013^{6 \cdot 335 + 4} \equiv 2013^4 \pmod{7} \equiv 4^4 \pmod{7} = 4 \pmod{7}$$
- $$2014 \equiv -2 \pmod{7} \Rightarrow 2014^{12} \equiv 1 \pmod{7}$$
- $$\Rightarrow 2014^{2015} = 2014^{12 \cdot 167 + 11} \equiv 2014^{11} \pmod{7} \equiv (-2)^{11} \pmod{7} \equiv$$
- $$(-2) \cdot 4^5 \pmod{7} \equiv -4 \pmod{7}$$
- $$\Rightarrow 2013^{2014} + 2014^{2015} \text{ chia cho 7 dư } 0$$



Bài tập 18

□ Tìm số dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 4

$$2013 \equiv 1(\text{mod } 4) \Rightarrow 2013^{2014} \equiv 1(\text{mod } 4)$$

$$2014 \equiv 2(\text{mod } 4) \Rightarrow 2014^2 \equiv 0(\text{mod } 4) \Rightarrow 2014^{2015} = 2014^{2 \cdot 1007 + 1} \\ \equiv 0(\text{mod } 4)$$

Dư của phép chia $2013^{2014} + 2014^{2015}$ cho 4 là 1

Bài tập 19

□ CM rằng: $2011^{2009} + 2009^{2011}$ chia hết cho 4

$$2011 = 2012 - 1 = 4 \cdot 503 - 1 \Rightarrow 2011^{2009} = (4 \cdot 503 - 1)^{2009} = 4p - 1$$

$$2009 = 2008 + 1 = 4 \cdot 502 + 1 \Rightarrow 2009^{2011} = (4 \cdot 502 + 1)^{2011} = 4q + 1$$

Ta được: $2011^{2009} + 2009^{2011}$ chia hết cho 4