

TOÁN RỜI RẠC (DISCRETE MATHEMATICS)

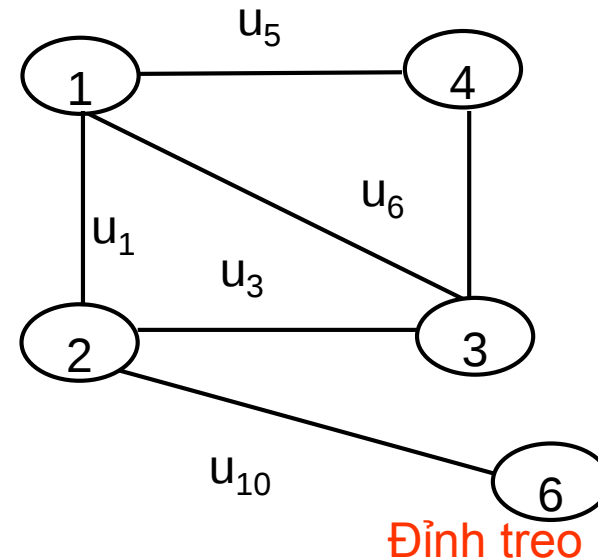
2

ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐỒ THỊ

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

3

- $G = (X, U)$, trong đó:
 - ▣ X : tập hợp các đỉnh
 - ▣ U : tập hợp các cạnh $u=(i, j) = (j, i)$
 - ▣ Đỉnh kề: chung cạnh (vd đỉnh 1,2)
 - ▣ Cạnh kề: chung đỉnh (vd cạnh u_1, u_3)

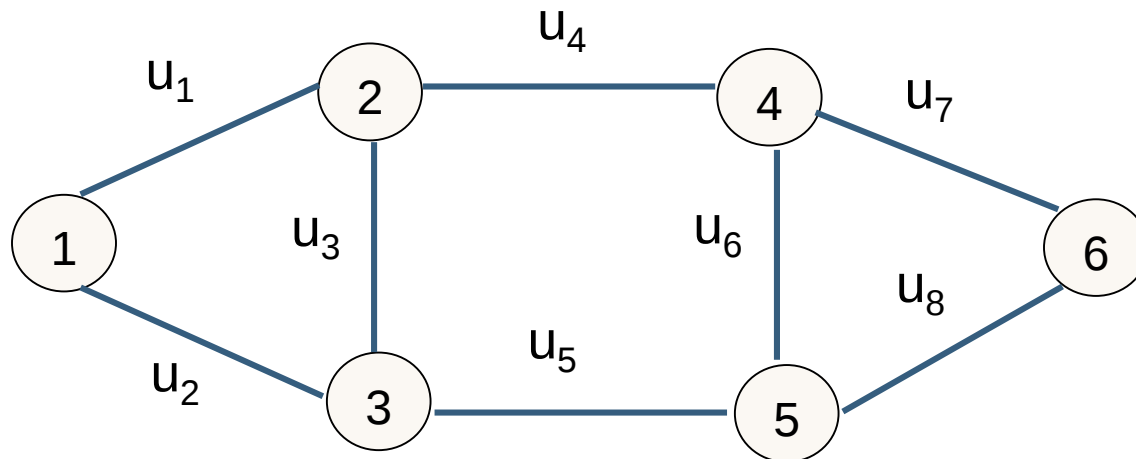


Đỉnh cô lập

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

4

- Đa đồ thị: tồn tại cặp đỉnh phân biệt (i,j) có **nhiều hơn một cạnh** và **không có khuyên**
- Đồ thị đơn (đơn đồ thị): tất cả các cặp đỉnh (i,j) phân biệt có **nhiều nhất một cạnh** và **không có khuyên**



ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

- **Đồ thị đầy đủ** là đồ thị luôn tồn tại cung/cạnh nối hai đỉnh bất kỳ
- **Đồ thị con**
 - A là tập hợp con của X
 - **Đồ thị con G_A** của đồ thị G sinh ra bởi A có **đỉnh là A** có cung/cạnh là cung/cạnh của G mà đỉnh của chúng thuộc A.

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

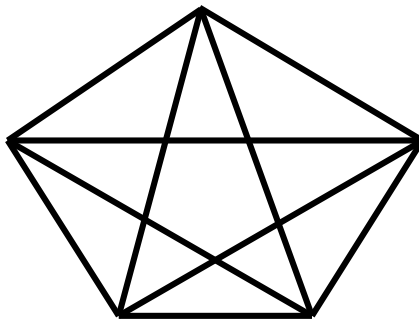
6

□ Đồ thị bộ phận

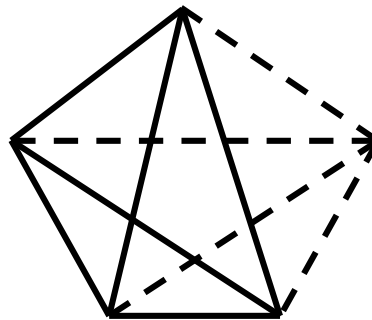
□ V là tập hợp con của U

□ Đồ thị bộ phận sinh ra bởi V là đồ thị có đỉnh thuộc X và các cung/cạnh là V

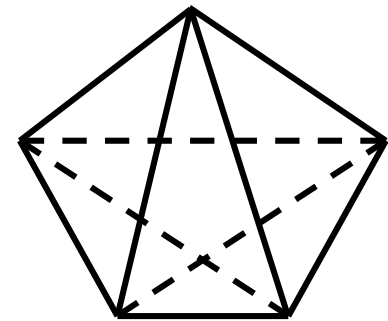
□ Đồ thị bộ phận con là đồ thị vừa là đồ thị con vừa là đồ thị bộ phận



Đồ thị đầy đủ G



Đồ thị con của G



Đồ thị bộ phận của G

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

□ Đường đi và chu trình:

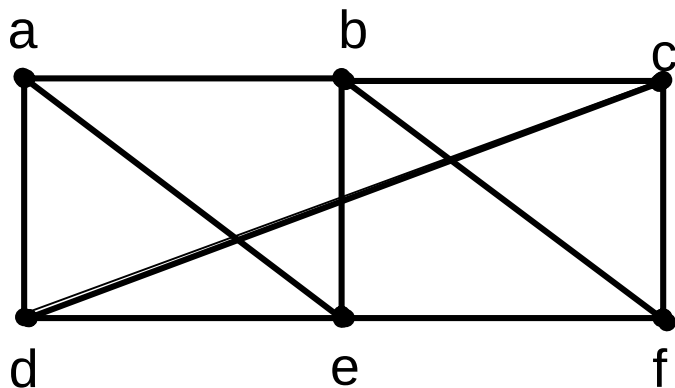
▣ Đường đi (vô hướng): một dãy các cạnh kề nhau

■ Đỉnh đầu: đỉnh bắt đầu của đường đi

■ Đỉnh cuối: đỉnh kết thúc của đường đi

■ Độ dài: số cạnh trên đường đi

▣ Đường đi sơ cấp: đường đi có các đỉnh khác nhau từng đôi một



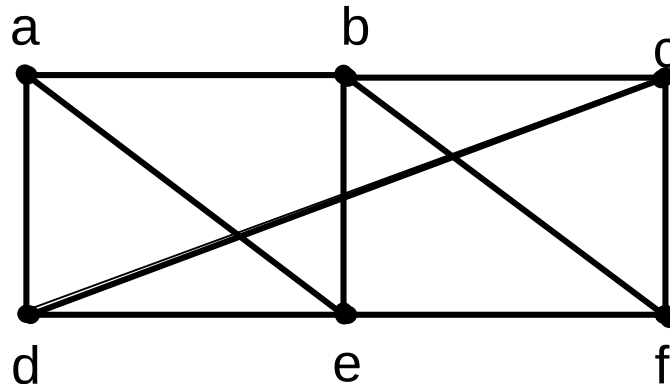
a - b - e - f - b - c: đường đi

a - d - e - f - b: đường đi sơ cấp

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

□ Đường đi và chu trình:

- **Chu trình:** một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau
- **Chu trình sơ cấp:** một chu trình có các đỉnh khác nhau từng đôi một, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối



a - b - c - f - b - e - a: chu trình

b - c - d - e - a - b: chu trình sơ cấp

ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

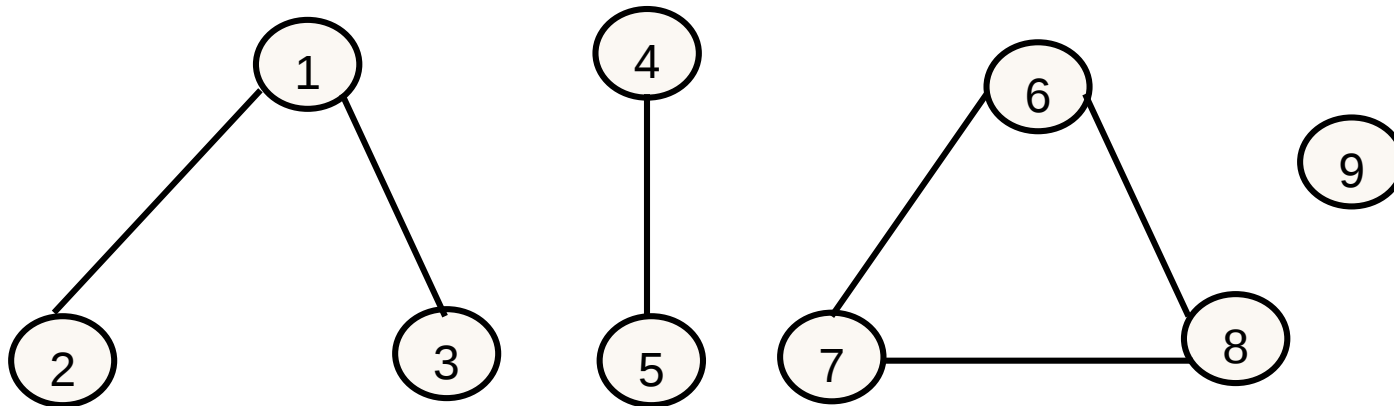
- Xét đồ thị vô hướng $G = (X, U)$
- **Đồ thị liên thông:** với mỗi cặp đỉnh i, j bất kỳ thì luôn tìm được đường đi từ i đến j

Nhận xét: đồ thị vô hướng $G = (X, U)$

1. Đồ thị **G là liên thông** khi và chỉ khi **G chỉ có một bộ phận liên thông**
2. Mỗi bộ phận liên thông là một đồ thị liên thông
3. Mỗi đỉnh cô lập là một bộ phận liên thông

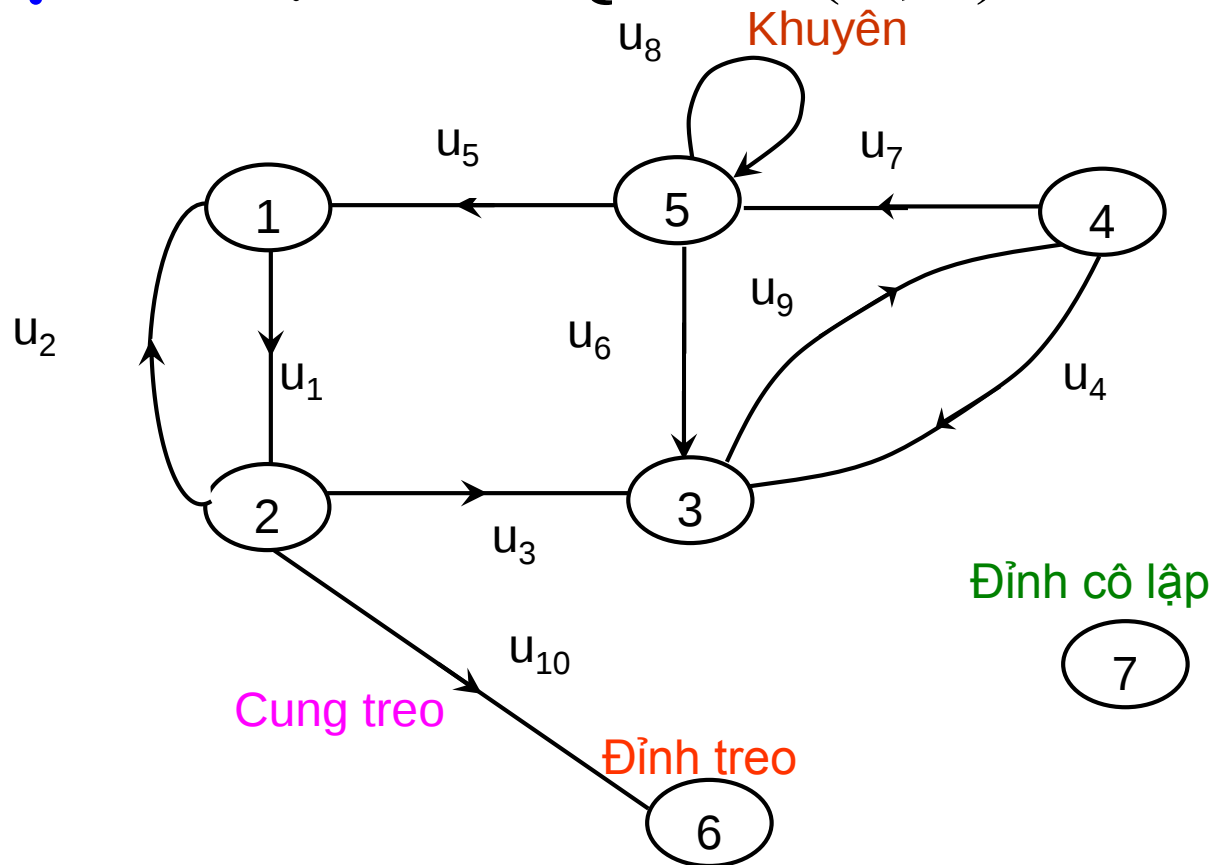
ĐỒ THỊ VÔ HƯỚNG

- Đồ thị vô hướng có 9 đỉnh, 6 cạnh và 4 bộ phận liên thông



ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

□ **Ví dụ:** Đồ thị có hướng: $G = (X, U)$



ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- $G = (X, U)$, trong đó :
 - ▣ **X**: tập hợp các đỉnh
 - ▣ **U**: tập hợp các **cặp đỉnh có thứ tự** $u=(i, j)$ - **cung**
 - ▣ **Khuyên**: Cung $u=(i, i)$
 - ▣ **Đỉnh treo**: chỉ có một cung duy nhất (đi tới hoặc đi ra từ) đỉnh đó
 - ▣ **Cung treo**: cung duy nhất (đi tới hoặc đi ra từ) đỉnh treo
 - ▣ **Đỉnh cô lập**: không có cung nào từ đỉnh đó đi ra và cũng không có cung nào đi tới đỉnh đó

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

- **Đa đồ thị**: tồn tại cặp đỉnh có thứ tự (i,j) có nhiều hơn một cung và có thể có khuyên
- **Đồ thị đơn (đơn đồ thị)**: tất cả các cặp đỉnh có thứ tự (i, j) có nhiều nhất một cung
- **Đồ thị có hướng**: $G = (X,U)$, cung $u=(i, j) \in U$

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

□ **Nửa bậc**

- ▣ **Nửa bậc trong** của đỉnh x , ký hiệu là $d^-(x)$, là số cung có ngọn là x , là số cung đi vào x
- ▣ **Nửa bậc ngoài** của đỉnh x , ký hiệu là $d^+(x)$, là số cung có gốc là x , là số cung từ x đi ra

□ **Bậc** là số cung/cạnh chứa x

$$d(x) = d^-(x) + d^+(x)$$

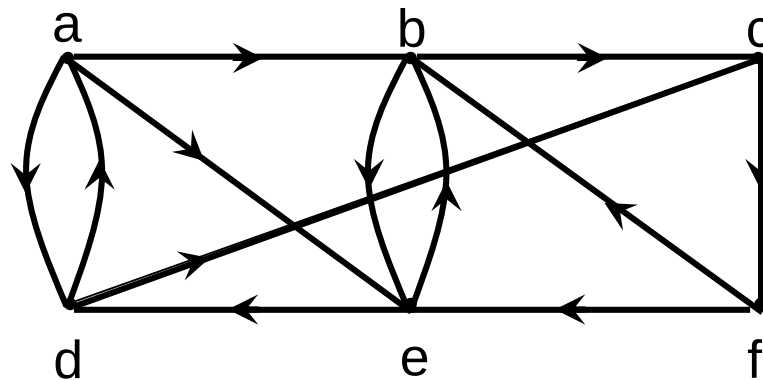
ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

□ Đường đi và chu trình

■ Đường đi (có hướng): một dãy liên tiếp các cung

- Đỉnh đầu: đỉnh bắt đầu của đường đi
- Đỉnh cuối: đỉnh kết thúc của đường đi
- Độ dài: số cung trên đường đi

■ Đường đi sơ cấp: đường đi có các đỉnh khác nhau từng đôi một

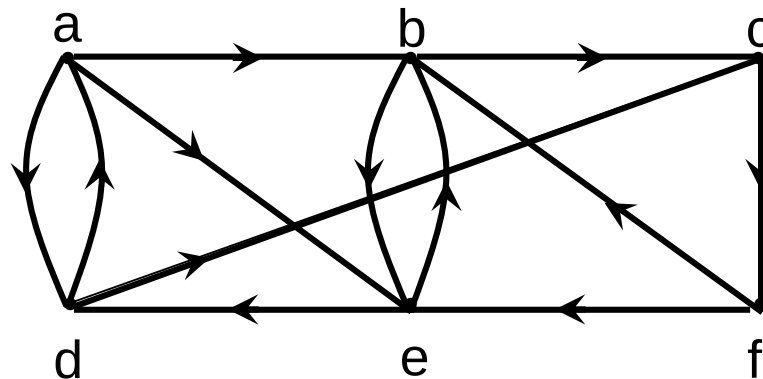


a - d - c - f - e: đường đi sơ cấp

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

□ Đường đi và chu trình

- ▣ **Chu trình:** một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau
- ▣ **Chu trình sơ cấp:** một chu trình có các đỉnh khác nhau từng đôi một, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối



b - c - f - e - d - a - b: chu trình sơ cấp

ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

□ Đồ thị có hướng liên thông

Xét đồ thị có hướng $G = (X, U)$

- ▣ Đồ thị liên thông yếu: đồ thị vô hướng tương ứng với G là liên thông
- ▣ Đồ thị liên thông một chiều: nếu với hai đỉnh i, j bất kỳ hoặc là tồn tại đường đi từ i đến j , hoặc là tồn tại đường đi từ j đến i
- ▣ Đồ thị liên thông mạnh: nếu với hai đỉnh i và j bất kỳ tồn tại đường đi đi từ đỉnh i đến đỉnh j và ngược lại

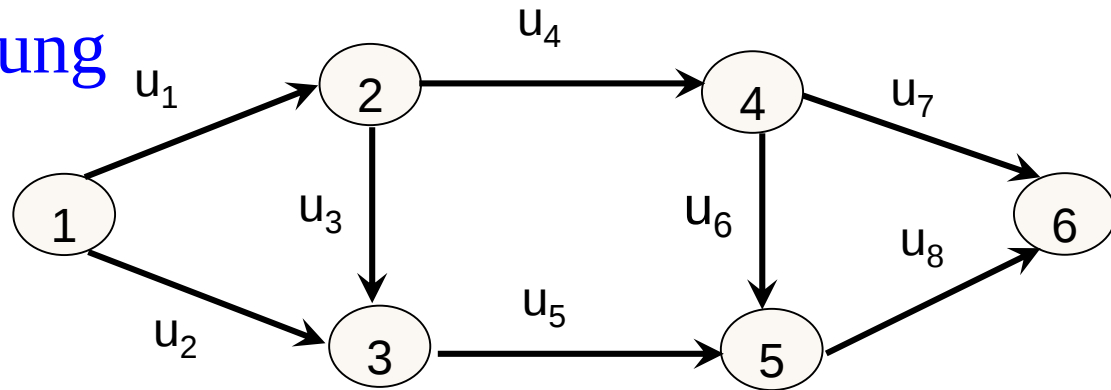
BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

- Biểu diễn đồ thị bằng ma trận
 - Ma trận đỉnh – cung
 - Ma trận đỉnh – cạnh
 - Ma trận đỉnh – đỉnh
 - Ma trận trọng số

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

- Ma trận đỉnh – cung

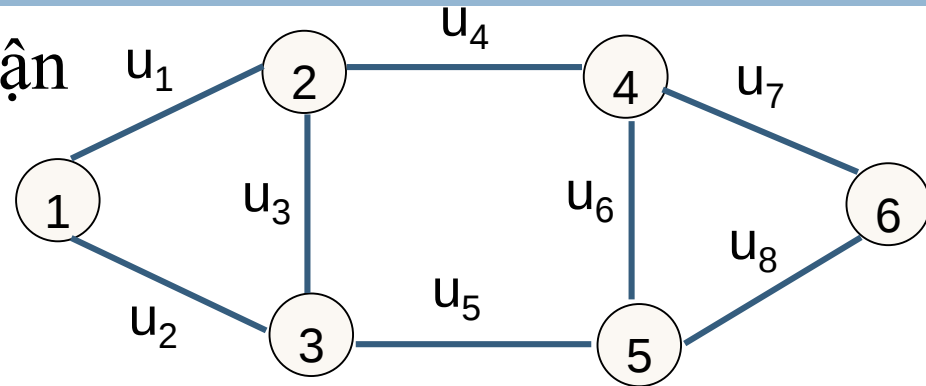


	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	-1	-1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	-1	-1

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

- Ma trận đỉnh – cạnh

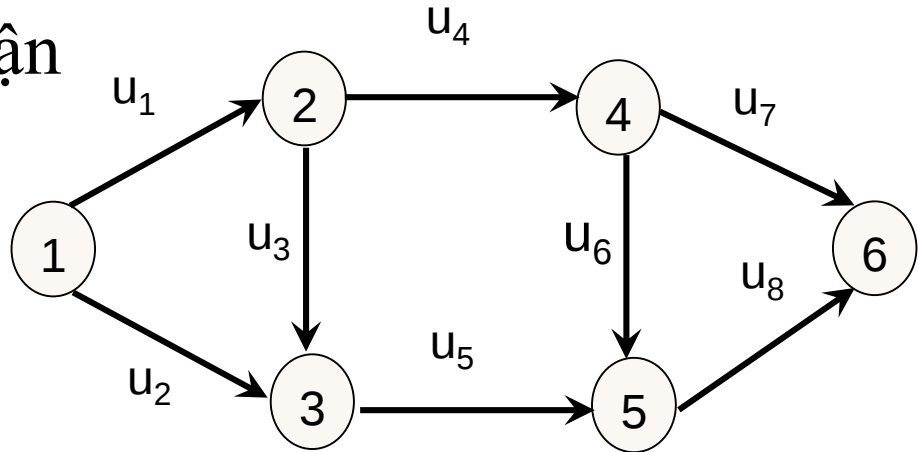


	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

- Ma trận kề đỉnh – đỉnh

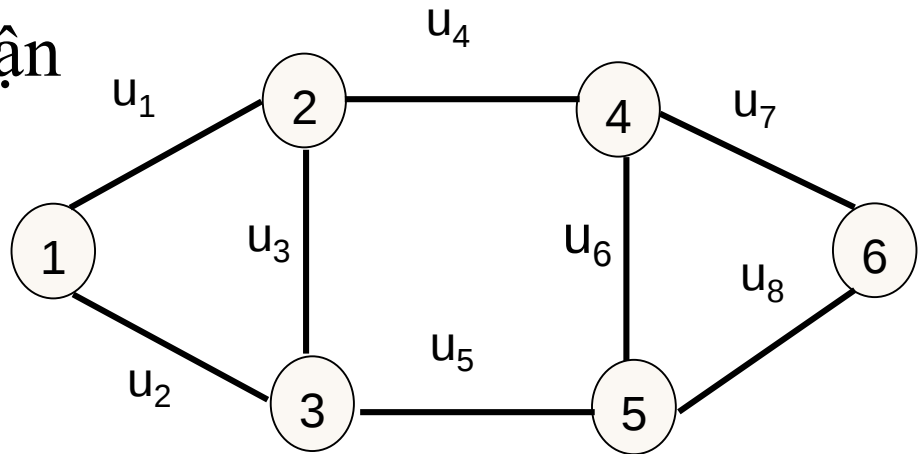


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

- Ma trận kề đỉnh – đỉnh

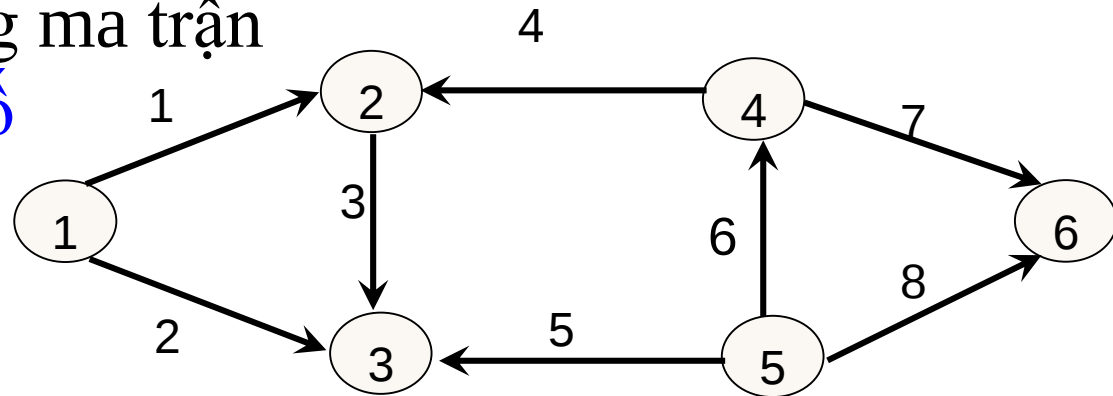


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Biểu diễn đồ thị bằng ma trận

- Ma trận trọng số



	1	2	3	4	5	6
1		1	2			
2			3			
3						
4		4				7
5			5	6		8
6						

ĐỒ THỊ EULER, HAMILTON

Đồ thị Euler và nửa Euler

- *Chu trình Euler*: *chu trình* trong đồ thị G đi qua *mỗi cạnh* của đồ thị *đúng một lần*
⇒ *Đồ thị Euler*: Đồ thị có chu trình Euler
- *Đường đi Euler*: đường đi đơn trong G đi qua *mỗi cạnh* của nó *đúng một lần*
- ⇒ *Đồ thị nửa Euler*: Đồ thị có đường đi Euler
- ⇒ Mọi đồ thị Euler đều là đồ thị nửa Euler

Định lý

Cho đồ thị G

- a) G có chu trình Euler nếu và chỉ nếu G là đồ thị liên thông và mọi đỉnh của G có bậc chẵn*
- b) G có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu G là đồ thị liên thông và G có đúng 2 đỉnh có bậc lẻ*

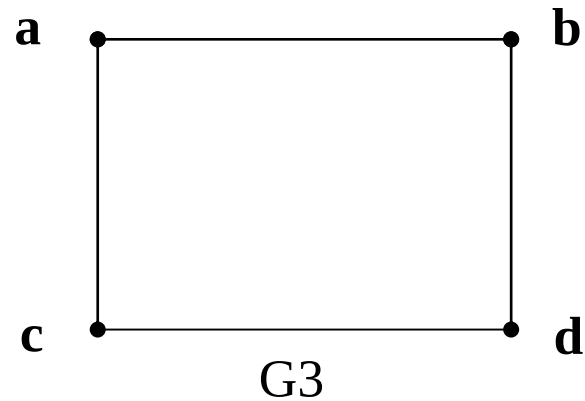
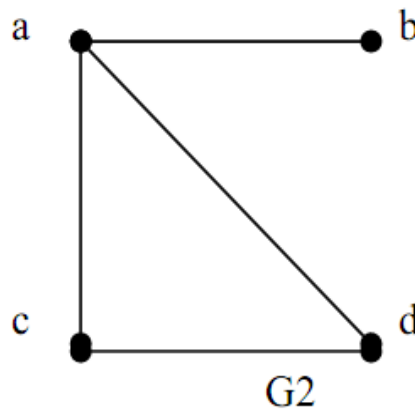
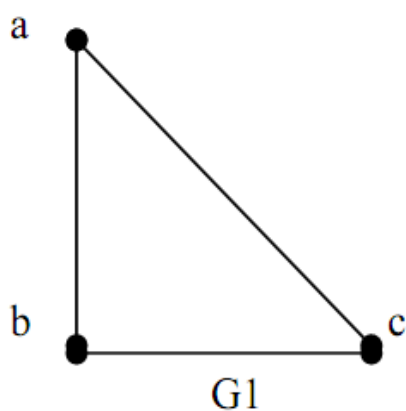
Đồ thị Hamilton và nửa Hamilton

27

- Chu trình bắt đầu tại một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại mỗi đỉnh đứng một lần sau đó quay trở lại v được gọi là *chu trình Hamilton*.
=> Đồ thị được gọi là **đồ thị Hamilton** nếu nó chứa *chu trình Hamilton*.
- Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đứng một lần được gọi là *đường đi Hamilton*.
=> Đồ thị chứa đường đi Hamilton được gọi là **đồ thị nửa Hamilton**.
- Như vậy, *đồ thị Hamilton bao giờ cũng là đồ thị nửa Hamilton* nhưng điều ngược lại không luôn luôn đúng.

Đồ thị Hamilton và nửa Hamilton

✓ **Ví dụ.** Xét các đồ thị $G1$, $G2$, $G3$ trong hình sau:



Ta có: *đồ thị nửa Hamilton $G2$, Hamilton $G1$ và $G3$*

ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

30

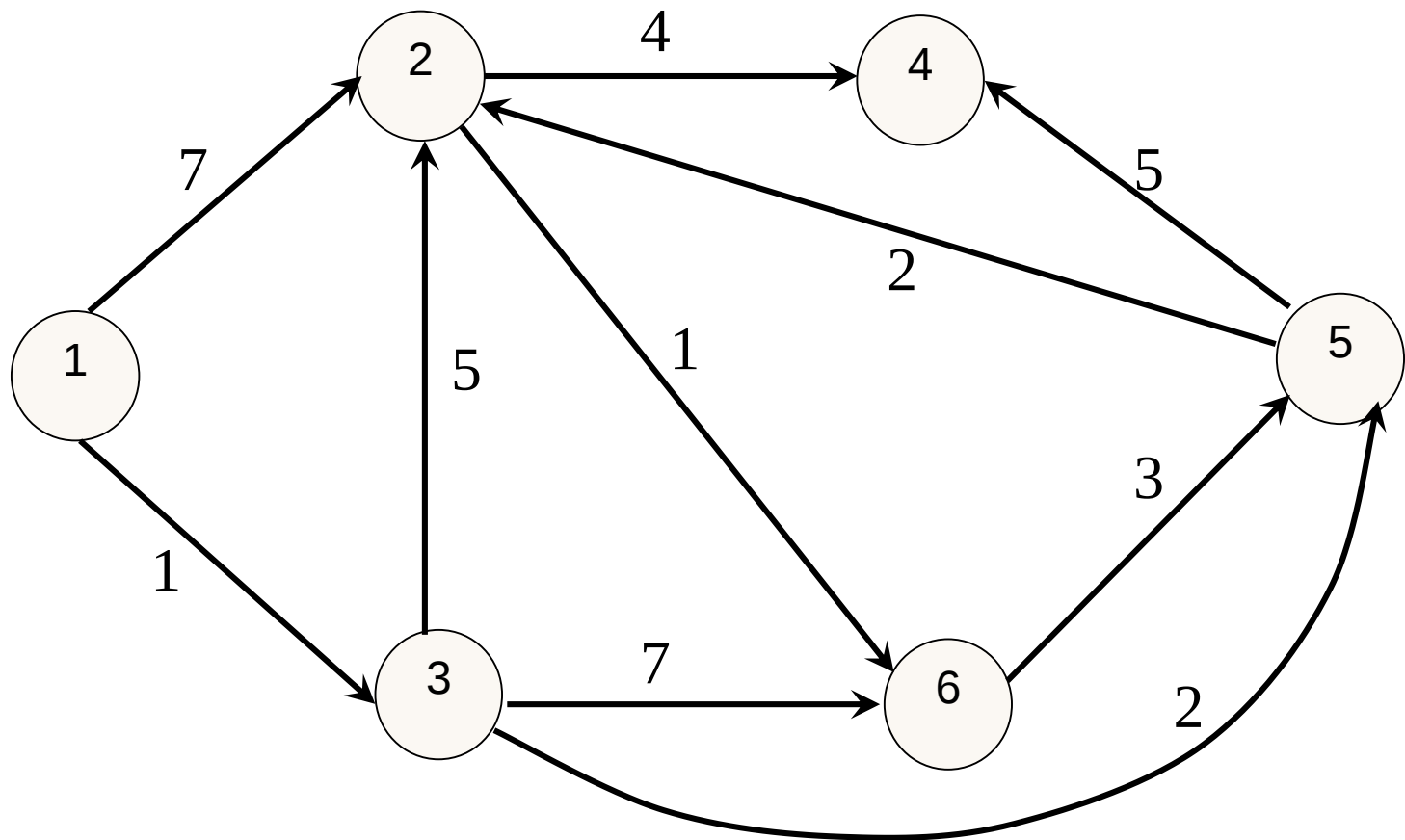
- **Đường đi ngắn nhất:** Xét đồ thị có hướng $G=(X, U)$
 - ▣ Với mỗi cung $u=(i,j)=l(u)$ hay $l_{ij} \in \mathbb{R}$: độ dài cung hay là trọng số của cung.
 - ▣ Độ dài l của đường đi (có hướng) đi từ đỉnh i đến đỉnh j là **tổng của tất cả các độ dài của các cung nằm trên đường đi đó.**
 - ▣ Bài toán đường đi ngắn nhất là: với hai đỉnh i và j của đồ thị hãy xác định đường đi ngắn nhất từ i đến j .
- **Ứng dụng thực tiễn:** độ dài cung được hiểu cụ thể như là độ dài, chi phí, thời gian, lưu lượng

Giải thuật Moore – Dijkstra

31

- **Tìm đường đi ngắn nhất từ một đỉnh s đến các đỉnh còn lại trong đồ thị**
- **$G=(X,U)$ là đồ thị liên thông có trọng số dương**
 - ▣ $l_{i,j}$ là độ dài của cung $u=(i,j)$ với $u \in U$.
 - ▣ $\pi^*(s) = 0$
 - ▣ $\pi^*(i) = \infty$ với mọi đỉnh $i \in X \setminus \{s\}$
 - ▣ $S = \emptyset, Q = X$
 - ▣ while $Q \neq \emptyset$ do
 - $m = \min_distance(Q, \pi^*)$
 - $S = S + \{m\}; Q = Q \setminus \{m\}$
 - for ($v \in Q$ và có cung (m,v)) do
 - $\pi^*(v) = \min(\pi^*(v), \pi^*(m) + l_{m,v})$

Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau:

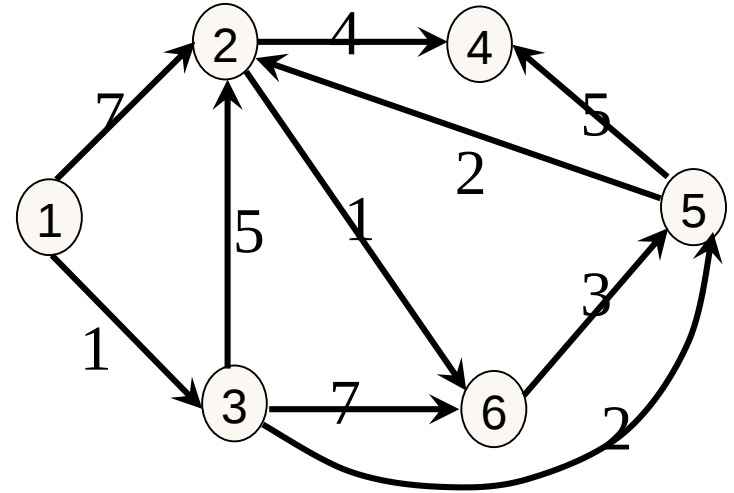


Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

33

Khởi tạo :

- $\pi^*(1) = 0$
- $\pi^*(2) = \infty, \pi^*(3) = \infty, \pi^*(4) = \infty,$
 $\pi^*(5) = \infty, \pi^*(6) = \infty$
- $S = \emptyset, Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

34

Lần lặp 1: $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq \emptyset$

$m = \{1\}$ vì $\pi^*(1) = 0$ nhỏ nhất

$S = \{1\}$, $Q = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

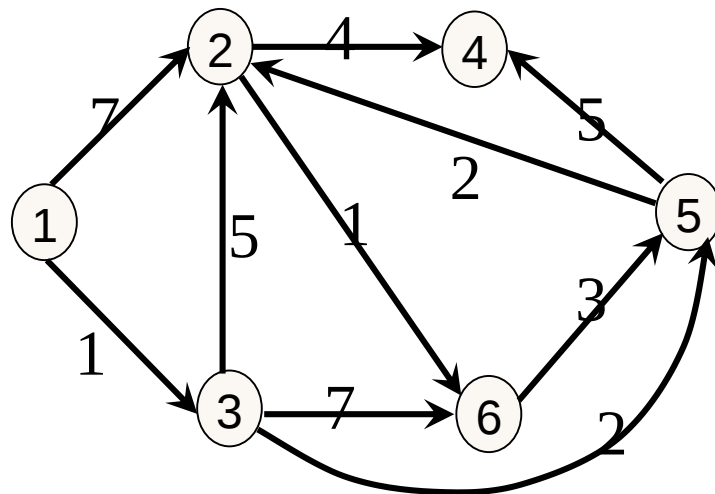
Xét đỉnh $\{2\} \in Q$ và có cung $(1,2)$

$\pi^*(2) = \min\{\pi^*(2), \pi^*(1) + l_{1,2}\} = 7$

Xét đỉnh $\{3\} \in Q$ và có cung $(1,3)$

$\pi^*(3) = \min\{\pi^*(3), \pi^*(1) + l_{1,3}\} = 1$

$\pi^*(4) = \infty$, $\pi^*(5) = \infty$, $\pi^*(6) = \infty$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

35

Lần lặp 2: $Q = \{2, 3, 4, 5, 6\} \neq \emptyset$

$m = \{3\}$ vì $\pi^*(3) = 1$ nhỏ nhất

$S = \{1, 3\}$, $Q = \{2, 4, 5, 6\}$

Xét đỉnh $\{2\} \in Q$ và có cung $(3,2)$

$\pi^*(2) = \min\{\pi^*(2), \pi^*(3) + l_{3,2}\} = 6$

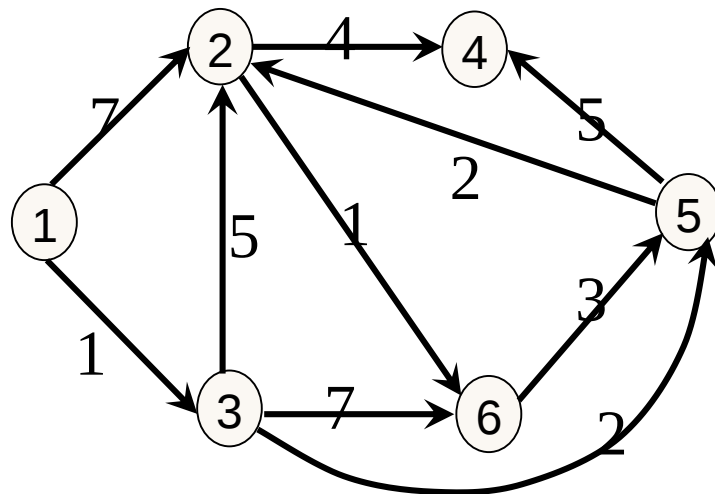
Xét đỉnh $\{5\} \in Q$ và có cung $(3,5)$

$\pi^*(5) = \min\{\pi^*(5), \pi^*(3) + l_{3,5}\} = 3$

Xét đỉnh $\{6\} \in Q$ và có cung $(3,6)$

$\pi^*(6) = \min\{\pi^*(6), \pi^*(3) + l_{3,6}\} = 8$

$\pi^*(4) = \infty$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

36

Lần lặp 3: $Q = \{2, 4, 5, 6\} \neq \emptyset$

$m = \{5\}$ vì $\pi^*(5) = 3$ nhỏ nhất

$S = \{1, 3, 5\}$, $Q = \{2, 4, 6\}$

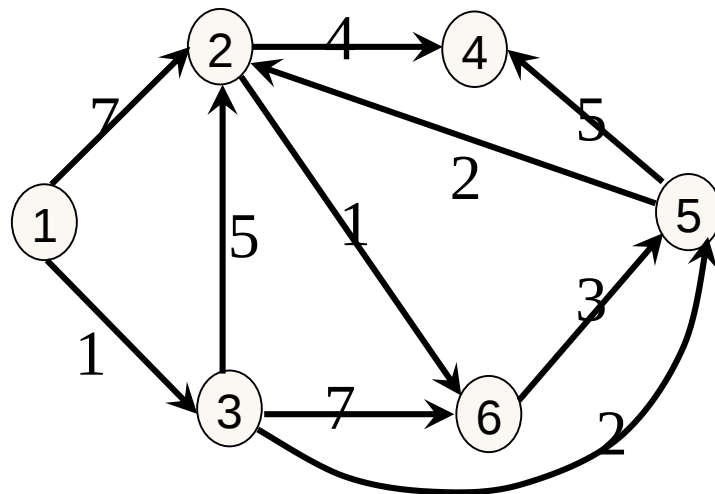
Xét đỉnh $\{2\} \in Q$ và có cung $(5,2)$

$\pi^*(2) = \min\{\pi^*(2), \pi^*(5) + l_{5,2}\} = 5$

Xét đỉnh $\{4\} \in Q$ và có cung $(5,4)$

$\pi^*(4) = \min\{\pi^*(4), \pi^*(5) + l_{5,4}\} = 8$

$\pi^*(6) = 8$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

37

Lần lặp 4: $Q = \{2, 4, 6\} \neq \emptyset$

$m = \{2\}$ vì $\pi^*(2) = 5$ nhỏ nhất

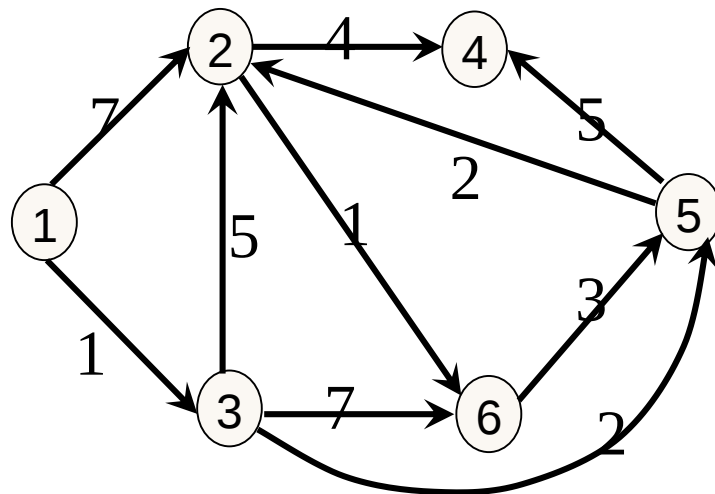
$S = \{1, 3, 5, 2\}, Q = \{4, 6\}$

Xét đỉnh $\{4\} \in Q$ và có cung $(2,4)$

$\pi^*(4) = \min\{\pi^*(4), \pi^*(2) + l_{2,4}\} = 8$

Xét đỉnh $\{6\} \in Q$ và có cung $(2,6)$

$\pi^*(6) = \min\{\pi^*(6), \pi^*(2) + l_{2,6}\} = 6$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

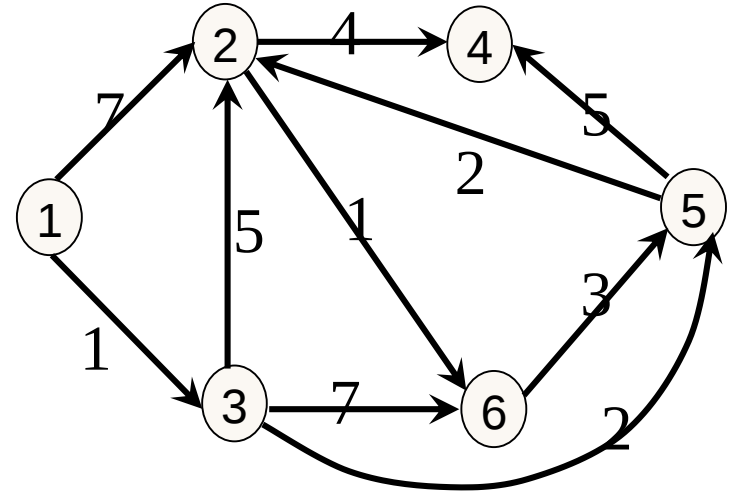
38

Lần lặp 5: $Q = \{4, 6\} \neq \emptyset$

$m = \{6\}$ vì $\pi^*(6) = 6$ nhỏ nhất

$S = \{1, 3, 5, 2, 6\}$, $Q = \{4\}$

$\pi^*(4) = 8$



Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị sau

39

Lần lặp 6: $Q = \{4\} \neq \emptyset$

$m = \{4\}$ vì $\pi^*(4) = 8$ nhỏ nhất

$S = \{1, 3, 5, 2, 6, 4\}$, $Q = \emptyset$

